ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) ΕΠΑΛ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 31**

Α2. **α) Σχολικό βιβλίο σελίδα 65**

β) Σχολικό βιβλίο σελίδα 86-87

Α3. **α) ΛΑΘΟΣ** **β) ΛΑΘΟΣ** **γ) ΣΩΣΤΟ** **δ) ΣΩΣΤΟ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}$, $x \in R$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 2x + 5 + 0 = x^2 - 6x + 5,\ \ x \in R$$

Β2.

- $\boldsymbol{f'(x) = 0} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow x(x-1) - 5(x-1) = 0$

  $\Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 1}$ ή $\boldsymbol{x = 5}$.

- $\boldsymbol{f'(x) > 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (-\infty, \boldsymbol{1}) \cup (\boldsymbol{5}, +\infty)$

- $\boldsymbol{f'(x) < 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{5})$

Τα πρόσημα της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ $\quad$ 1	5	$+\infty$
$\boldsymbol{f'(x)}$	**+**	**-**	**+**
$\boldsymbol{f}$	↗	↘	↗

Έχουμε $f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$ και $f(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + \frac{1}{3} = \boldsymbol{-8}$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση $\boldsymbol{x = 1}$ **το** $\boldsymbol{f(1) = \frac{8}{3}}$ και

τοπικό ελάχιστο στη θέση $\boldsymbol{x = 5}$ **το** $\boldsymbol{f(5) = -8}$.

B3. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_o = 0$ έχει μορφή:

$$\varepsilon:\ y = \lambda x + \beta$$

όπου $\lambda = f'(0) = 5$ άρα

$$\varepsilon:\ y = 5x + \beta$$

Επιπλέον έχουμε $f(0) = \frac{1}{3}$ άρα το σημείο επαφής είναι το $\Sigma(0, \frac{1}{3})$.

Επειδή η ε διέρχεται από το $\Sigma(0, \frac{1}{3})$ θα ισχύει: $\frac{1}{3} = 5 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

Τελικά η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση: $\boldsymbol{y = 5x + \frac{1}{3}}$

B4. Το όριο $\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f(-1+h)-f(-1)}}{\boldsymbol{h}}$ είναι εξ ορισμού ίσο με την παράγωγο της f στο $-\mathbf{1}$ άρα

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f(-1+h)-f(-1)}}{\boldsymbol{h}} = f'(-1) = (-1)^2 - 6(-1) + 5 = \mathbf{12}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $\boldsymbol{s} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{2x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+7x-7}{2x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)+7(x-1)}{2x-2} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+7}{2} = \frac{1+7}{2} = \mathbf{4}$, άρα $\boldsymbol{s} = \mathbf{4}$.

Γ2. $CV = 20\% \Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{10} \Leftrightarrow 2 \cdot |\bar{x}| = 10s \Leftrightarrow |\bar{x}| = 5s = 20$

Άρα $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbf{20}$ ή $\bar{\boldsymbol{x}} = -\mathbf{20}$ **σε** °C.

- **Αν $\bar{x} = -20$, τότε**

$-20 = \frac{22+18+(20+\kappa)+14+16}{5} \Leftrightarrow -20 = \frac{90+\kappa}{5} \Leftrightarrow -100 = 90 + \kappa \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa} = -\mathbf{190}$

και οι παρατηρήσεις γίνονται: **22, 18, -170, 14, 16.**

***Ακόμα και αν αγνοήσουμε το γεγονός ότι δεν έχει παρατηρηθεί ποτέ θερμοκρασία $-170\ {}^oC$ εκτός εργαστηρίου, στον πλανήτη Γη, η τιμή $\kappa = -190$* απορρίπτεται γιατί τότε, η αντίστοιχη απόκλιση γίνεται:**

$$\boldsymbol{s} = \sqrt{\frac{(22+20)^2 + (18+20)^2 + (-170+20)^2 + (14+20)^2 + (16+20)^2}{5}} > \sqrt{\frac{150^2}{5}}$$

Δηλαδή $s > \frac{150}{\sqrt{5}} > \frac{150}{\sqrt{9}} = \mathbf{50}$***, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το*** $\boldsymbol{s = 4}$.

- ***Αν*** $\bar{x} = \mathbf{20}$ **, τότε**

$$20 = \frac{22+18+(20+\kappa)+14+16}{5} \Leftrightarrow 20 = \frac{90+\kappa}{5} \Leftrightarrow 100 = 90 + \kappa \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa = 10}$$

και οι παρατηρήσεις γίνονται: **22, 18, 30, 14, 16.**

Δυστυχώς, και στην περίπτωση αυτή η απόκλιση είναι:

$$\boldsymbol{s} = \sqrt{\frac{(22-20)^2 + (18-20)^2 + (30-20)^2 + (14-20)^2 + (16-20)^2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2)^2 + (2)^2 + (10)^2 + (6)^2 + (4)^2}{5}} = \sqrt{\frac{160}{5}} = \sqrt{32}$$

Δηλαδή $\boldsymbol{s = \sqrt{32} > \sqrt{25} = 5}$***, το οποίο έρχεται και αυτό σε αντίθεση με το*** $\boldsymbol{s = 4}$.

Άρα τα δεδομένα του θέματος είναι μεταξύ τους ***ασύμβατα.***

Αν θεωρήσουμε ότι κ=10, τότε οι παρατηρήσεις διατάσσονται ως εξής:

14, 16, 18, 22, 30

και επειδή έχουν περιττό πλήθος, η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή δ=18.

Γ4. Αν κάθε παρατήρηση αυξηθεί κατά 10%, οι νέες παρατηρήσεις θα είναι:

$$\boldsymbol{y_i = x_i + 0{,}1x_i = 1{,}1x_i \quad , \quad i = 1, \dots, 5}$$

με μέση τιμή: $\boldsymbol{\bar{y} = 1{,}1\bar{x}}$

και τυπική απόκλιση: $\boldsymbol{s_y = 1{,}1s_x}$

Άρα: $\boldsymbol{CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{1{,}1s_x}{1{,}1\bar{x}} = \frac{s_x}{\bar{x}} = CV_x = 20\%}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ ισχύει το **Πυθαγόρειο Θεώρημα**, επομένως:

$$(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 10^2 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{y^2 = 100 - x^2} \qquad (\mathbf{1})$$

Οι μεταβλητές x, y εκφράζουν **τα μήκη** των κάθετων πλευρών του τριγώνου άρα είναι **θετικοί αριθμοί,** δηλαδή

$$\boldsymbol{x > 0} \quad (\mathbf{2}) \qquad \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \qquad \boldsymbol{y > 0} \qquad (\mathbf{3})$$

Από την (3) έχουμε:

$$y^2 > 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow |x| < 10 \Leftrightarrow \boldsymbol{-10 < x < 10} \qquad (\mathbf{4})$$

Από τις (2) και (4), έχουμε: $\boldsymbol{0 < x < 10}$ **.**

Η (1) γράφεται $y = \sqrt{100 - x^2}$ και **η ζητούμενη συνάρτηση** είναι:

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{100 - x^2}}, \quad \boldsymbol{x \in (0, 10)}$$

Προφανώς, πεδίο ορισμού της $\boldsymbol{f}$ είνα**ι το** $\boldsymbol{A = (0, 10)}$**.**

Δ2. Η συνάρτηση **είναι παραγωγίσιμη,** με

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{(100-x^2)'}{2\sqrt{100-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} = \frac{\boldsymbol{-x}}{\boldsymbol{\sqrt{100-x^2}}} \quad , \ x \in (0,10)$$

Άρα ο **ρυθμός μεταβολής** της όταν $\boldsymbol{x = 8}$ είναι $\boldsymbol{f'(8) = \frac{-8}{\sqrt{100-8^2}} = \frac{-8}{\sqrt{36}} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}}$

Δ3.

$$\lim_{x\to 6} \frac{f(x)-8}{x-6} = \lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6} = \lim_{x\to 6} \frac{(\sqrt{100-x^2}-8)(\sqrt{100-x^2}+8)}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} = \lim_{x\to 6} \frac{100-x^2-64}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} =$$

$$\lim_{x\to 6} \frac{36-x^2}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} = \lim_{x\to 6} \frac{-(x-6)(6+x)}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)} = \lim_{x\to 6} \frac{-(6+x)}{(\sqrt{100-x^2}+8)} = \frac{-6-6}{\sqrt{64}+8} = \boldsymbol{\frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}}$$

Σχόλιο: το όριο υπολογίζεται και με τον ορισμό της παραγώγου και είναι ίσο με $\boldsymbol{f'}(6)$.

Δ4. Έχουμε δείξει στο **Δ2** ότι $\boldsymbol{f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}}$, $\boldsymbol{x \in (0, 10)}$.

Επιπλέον : $\sqrt{100-x^2} > 0$ και $x > 0$, για κάθε $x \in (0,10)$.

Άρα $\boldsymbol{f'(x) < 0}$, για κάθε $x \in (0,10)$ κι επομένως η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ **είναι γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(0,10)$.

Παρατηρούμε τώρα ότι για τις τιμές $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3}$ που δόθηκαν, ισχύει $\boldsymbol{0 < x_1 < x_3 < x_2 < 10}$

και αφού f γνησίως φθίνουσα, έχουμε:

$$\boldsymbol{f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)}.$$