Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 155

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α4.

α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

Θέμα Β

Έχουμε $g(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}, x\geq 1$ και $h(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}, x\geq 1$.

Β1. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=\{x\in D_g\cap D_h \mid h(x)\neq 0\}$, δηλαδή πρέπει $x\in[1,+\infty)$ και $h(x)\neq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ και $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\neq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ και $\sqrt{x}\neq\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\Leftrightarrow x\geq 1$ και $\sqrt{x}^2\neq 1 \Leftrightarrow x\geq 1$ και $x\neq 1 \Leftrightarrow x>1$. Άρα $D_f=(1,+\infty)$ και

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\frac{\sqrt{x}^2+1}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}^2-1}{\sqrt{x}}}=\frac{x+1}{x-1}, x>1.$$

Το πεδίο ορισμού της r είναι $D_r=D_g\cap D_h=[1,+\infty)$, και

$$r(x)=g(x)h(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=x-\frac{1}{x}, x\geq 1.$$

Β2. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχω:

$$\frac{x_1+1}{x_1-1}=\frac{x_2+1}{x_2-1}\Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1)=(x_1-1)(x_2+1)$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2-x_1+x_2-1=x_1x_2+x_1-x_2-1\Leftrightarrow x_1=x_2,$$

Οπότε η f είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται. Έτσι θα ισχύει η ισοδυναμία

$$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y).$$

$$y=f(x), x>1.$$

$$y = \frac{x+1}{x-1}, x > 1.$$

$$\Leftrightarrow yx - y = x + 1, x > 1.$$

$$\Leftrightarrow yx - x = y + 1, x > 1.$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) = y + 1, x > 1.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}, x > 1, y - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}, x > 1, y \neq 1.$$

Όμως $x > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1.$ Οπότε $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$. Ισχύει ότι $D_f = D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$ και

$f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x > 1$, συνεπώς $f = f^{-1}$.

B3.

Έχουμε $r(x) = x - \frac{1}{x}$ με $D_r = [1, +\infty)$ και αφού είναι συνεχής στο σύνολο αυτό, η C_r δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \coloneqq \lambda$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (r(x) - \lambda x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (r(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \coloneqq \beta$

Άρα η γραφική παράσταση της r έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $(\varepsilon): y = x$.

B4.

Για $x > 1$ είναι:

$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x}$

$\Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$ ή $x = 4 \Leftrightarrow x = \pm 1$ ή $x = 4$.

Οι λύσεις $x = \pm 1$ απορρίπτονται γιατί $\pm 1 \notin (1, +\infty)$ ενώ η λύση $x = 4$ γίνεται δεκτή γιατί $4 \in (1, +\infty)$.

Θέμα Γ

Γ1.

Η f είναι συνεχής στο $D_f = [0, +\infty)$ άρα θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$, επομένως $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(-2x + 4 + e^{\lambda}\right) = e^{\lambda}$

- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x^2 + 4x - 3 + \lambda) = \lambda + 1$

Έτσι θα πρέπει να ισχύει ότι $e^{\lambda} = \lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = 0$, καθώς για κάθε $u > 0$ ισχύει ότι

$\ln u \leq u - 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $u = 1$. Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x > 0$, άρα αν θέσουμε στη θέση του u το e^x θα είναι $\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1$

$\Leftrightarrow e^x \geq x + 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$.

Άρα $f(x) = \begin{cases} -2x + 5, 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, x \geq 2 \end{cases}$

Γ2.

Για $x \in (0,2)$, η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2 < 0$.

Για $x \in (2, +\infty)$, η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x + 4 = -2(x-2) < 0$, οπότε $f'(x) < 0$ για $x \in (0,2) \cup (2, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο 0 και το 2, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Για $x \geq 0$ έχουμε $x \geq 0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) \leq f(0) = 5$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$, το

$f(0) = 5$. Επιπλέον, αφού $f \searrow$ στο $[0, +\infty)$ δεν έχει άλλο ακρότατο.

Γ3.

i)

Έχουμε ότι

- $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{-2x + 5 - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{-2(x-2)}{x - 2} = -2.$

- $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} -(x - 2) = 0$

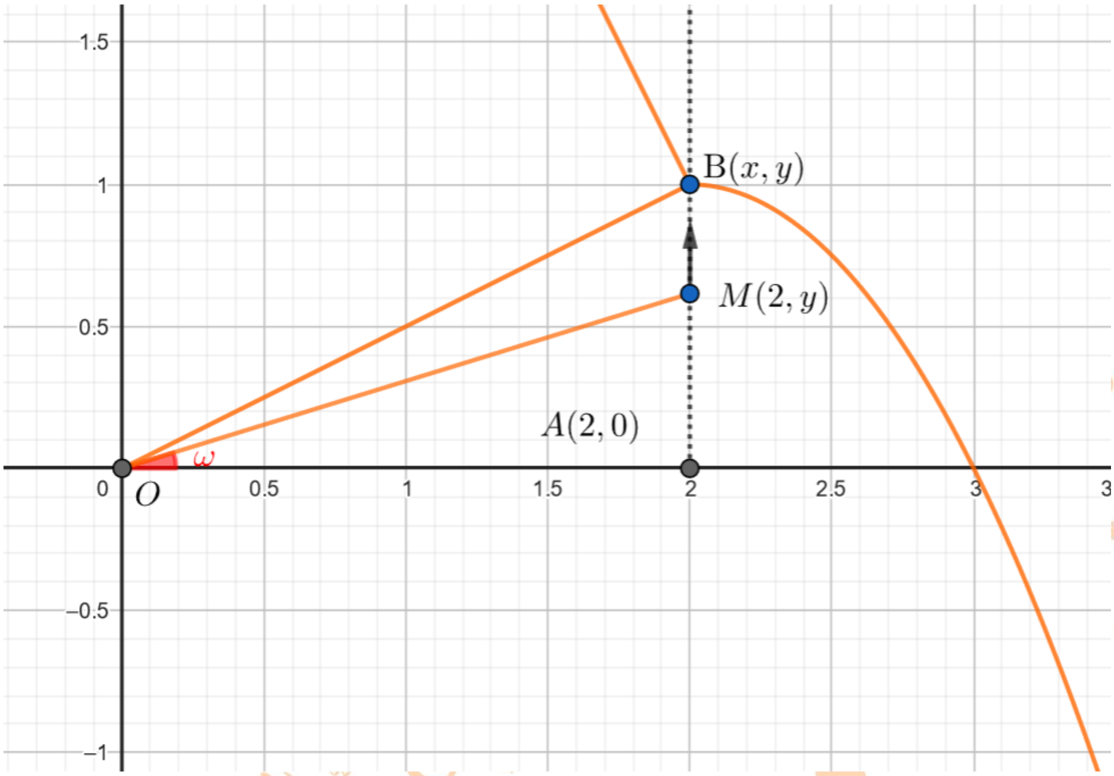
Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2, επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ και άρα η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[0,3]$.

ii) Αρκεί να εξετάσουμε αν υπάρχει $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(3) - f(0)}{3} = -\frac{5}{3}$

- Για $x \in (0,2)$, $f'(\xi) = -2 \neq -\frac{5}{3}$ άρα δεν υπάρχει τέτοιο $\xi \in (0,2)$ ώστε
- $f'(\xi) = -\frac{5}{3}$

- Για $x \in (2,3)$, $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -6\xi = -17 \Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6}$, η οποία γίνεται δεκτή.

Γ4.



Έστω y η τεταγμένη του σημείου M. Επομένως, η κατακόρυφη ταχύτητα του M είναι $y'(t) = v = 0{,}5\ μονάδες\ μήκους/sec$. Η εφαπτομένη της γωνίας $\omega = \widehat{AOM}$ είναι:

$$εφω = \frac{(AM)}{(OA)} = \frac{y}{2}$$

Το y μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t άρα και η γωνία ω μεταβάλλεται με το t και έχουμε

$$εφω(t) = \frac{1}{2} \cdot y(t) \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της (1) ως προς t έχουμε:

$$\big(εφω(t)\big)' = \frac{1}{2} \cdot y'(t) \Leftrightarrow \frac{\omega'(t)}{συν^2\omega(t)} = \frac{y'(t)}{2} \overset{y'(t)=0,5}{\Leftrightarrow} \omega'(t)\big(1 + εφ^2\omega(t)\big) = \frac{1}{4}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \omega'(t)\left(1 + \frac{y^2(t)}{4}\right) = \frac{1}{4}. \quad (2)$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_1$, το κινητό διέρχεται από το σημείο $B\big(2, f(2)\big) \equiv B(2,1)$,

οπότε $y(t_1) = 1$ και η (2) γίνεται:

$\omega'(t_1)\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'(t_1)\cdot\frac{5}{4}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'(t_1)=\frac{1}{5}\, rad/sec$.

Θέμα Δ

Δ1.

Για κάθε $x>0$, $f(x)=\frac{\ln x+ax}{x}=\frac{\ln x}{x}+a$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow 0<x<e$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(0,e]$ άρα

$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(e)\right]=\left(-\infty,\frac{1}{e}+a\right]$ καθώς

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}+a\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x+a\right)=-\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=(e,+\infty)$ άρα

$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to e^+} f(x)\right)=\left(a,a+\frac{1}{e}\right)$ καθώς

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+a\right)=0+a=a$ διότι

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\infty/\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

Επομένως $f(D_f)=f\left((0,+\infty)\right)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left(-\infty,a+\frac{1}{e}\right]$. Συνεπώς θα ισχύει ότι

$1 + \frac{1}{e} = a + \frac{1}{e} \Leftrightarrow a = 1.$

Δ2.

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ με $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + 1 = -2\ln 2 + 1 = \ln e - \ln 4 < 0$ και

$f(1) = \frac{\ln 1}{1} + 1 = 1 > 0$, οπότε $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$ και άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1, άρα θα έχει το πολύ μια ρίζα και αφού $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \subseteq \Delta_1$ μια ρίζα της f, αυτή θα είναι μοναδική. Επιπλέον $0 \notin f(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $\Delta_2 = (e, +\infty)$. Τελικά, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία ανήκει στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Δ3.

i)

- Αν $x \in (e, +\infty), f(x) = f(4) \overset{f \searrow \Delta_2}{\Leftrightarrow} x = 4.$

- Αν $x \in (0, e], f(x) = f(4)$ και $f(4) = \frac{\ln 4}{4} + 1 = \frac{2\ln 2}{4} + 1 = \frac{\ln 2}{2} + 1 = f(2)$

  και άρα $f(x) = f(4) \Leftrightarrow f(x) = f(2) \overset{f \nearrow \Delta_1}{\Leftrightarrow} x = 2.$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει ακριβώς δυο λύσεις, τις $x_1 = 2, x_2 = 4$.

ii)

Για $x > 0$ έχουμε, $2^x \leq x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \leq \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \leq 2\ln x \overset{:2x>0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln 2}{2} \leq \frac{\ln x}{x}$

$\Leftrightarrow f(x) \geq f(2) = f(4).$

- Αν $x \in (0, e], f(x) \geq f(2) \overset{f \nearrow (0,e]}{\Leftrightarrow} x \geq 2$, άρα $x \in [2, e]$.

- Αν $x \in (e, +\infty), f(x) \geq f(2) = f(4) \overset{f \searrow (e,+\infty)}{\Leftrightarrow} x \leq 4$ άρα $x \in (e, 4]$

Τελικά $x \in [2,4]$.

Δ4.

Αφού η g είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών, το εμβαδόν του χωρίου Ω δίνεται από τον τύπο:

$$E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|dx = \int_{-\ln 2}^{0} \left|f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}\right| dx$$

Αφού $x \leq 0$, έχουμε $\frac{1-x}{e^x} > 0$ άρα

$$E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^{0} |f(e^x)| \cdot \frac{1-x}{e^x} dx$$

Θέτω $u = e^x \Leftrightarrow x = \ln u$ και άρα $dx = \frac{du}{u}$

Για $x = 0, u = e^0 = 1$, ενώ για $x = -\ln 2\,, u = e^{-\ln 2} = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$. Άρα:

$$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u)| \cdot \frac{1-\ln u}{u^2} du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u)| \cdot f'(u) du$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και έχει ρίζα το $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ από το ερώτημα Δ2, άρα

- $\frac{1}{2} \leq u \leq x_0 \overset{f \nearrow \sigma\tau o \left[\frac{1}{2},1\right]}{\Rightarrow} f(u) \leq f(x_0) = 0$
- $u \geq x_0 \overset{f \nearrow \sigma\tau o \left[\frac{1}{2},1\right]}{\Rightarrow} f(u) \geq f(x_0) = 0$

Επομένως έχουμε:

$$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(u) \cdot f'(u) du + \int_{x_0}^{1} f(u) \cdot f'(u) du$$

$$= \left[-\frac{f^2(u)}{2}\right]_{1/2}^{x_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[f^2(x_0) - f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}[f^2(1) - f^2(x_0)]$$

$$\overset{f(x_0)=0}{=} \frac{1}{2} f^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f^2(1) = \frac{1}{2}[(-2\ln 2 + 1)^2 + 1^2]$$

$$= \frac{1}{2}(4\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2) = 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1, \text{ σε τ. μ.}$$