Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 104

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 128

Α4.
α) Λάθος
β) Λάθος
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

Θέμα Β

Β1.
Είναι $g(x) = \frac{4-e^{2x}}{e^x}, D_g = \mathbb{R}$ και $h(x) = \ln x, D_h = (0,+\infty)$.
$D_f = D_{goh} = \{x \in D_h \text{ και } h(x) \in D_g\} = \{x > 0 \mid \ln x \in \mathbb{R}\}$
Άρα $D_f = D_{goh} = (0,+\infty)$.
$f(x) = (goh)(x) = g(h(x)) = \frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4-e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4-x^2}{x}, x > 0$.
Επομένως $f(x) = \frac{4-x^2}{x}, x > 0$
Β2.
i)
$f(x) = \frac{4}{x} - x, x > 0$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με :
$f'(x) = -\frac{4}{x^2} - 1 < 0$, για κάθε $x > 0$, άρα $f \searrow$ στο $D_f = (0,+\infty)$.
ii)
Έχουμε ότι

$$\pi > e \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(\pi) < f(e) \Leftrightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \overset{4-e^2<0}{\Longleftrightarrow} \frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}.$$

Β3.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(4-x^2) = +\infty$,

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(4-x^2) = 4$. Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης της f.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{4}{x^2} - 1\right) = 0 - 1 = -1 \coloneqq \lambda$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{4}{x}-x+x)=0\coloneqq\beta$$

Άρα η ευθεία $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{x}=(-1)\cdot 0=0$, διότι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{f(x)}{x}}\right)=\frac{1}{-1}=-1.$

Για κάθε $x>0$ ισχύει ότι:

$-1\le\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\le 1 \overset{:x>0}{\iff} -\frac{1}{x}\le\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{x}\le\frac{1}{x}$

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}=0.$

Θέμα Γ

Γ1.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x+3, x<1\\ \frac{1}{x}+a, x\ge 1\end{cases}$$

$$1=\int_2^3 xf(x)dx=\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+a\right)dx=\int_2^3(1+ax)dx=\left[x+\frac{ax^2}{2}\right]_2^3=3+\frac{9a}{2}-2-2a=1+\frac{5a}{2}$$

Επομένως θα έχουμε $1+\frac{5a}{2}=1\Leftrightarrow\frac{5a}{2}=0\Leftrightarrow a=0$. Συνεπώς ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x+3, x<1\\ \frac{1}{x}, x\ge 1\end{cases}$$

Γ2.

i)

- $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x-2)=1-2=-1$

- $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$

Αφού $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1$, άρα ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$.

ii)

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A\big(1,f(1)\big)$ έχει εξίσωση:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$, όμως $f(1)=1, f'(1)=-1$, άρα:

$y-1=-(x-1)\Leftrightarrow y=-x+2\ \ (\varepsilon)$

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$, τότε:

$\varepsilon\varphi\omega=\lambda_\varepsilon=-1$ με $\omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ άρα $\omega=\frac{3\pi}{4}$.

Γ3.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ με $f'(x)=2x-3<0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)$ γιατί $x<1\Leftrightarrow 2x<2<3$, άρα $2x<3\Leftrightarrow 2x-3<0$.

- Επιπλέον $f'(1) = -1 < 0$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

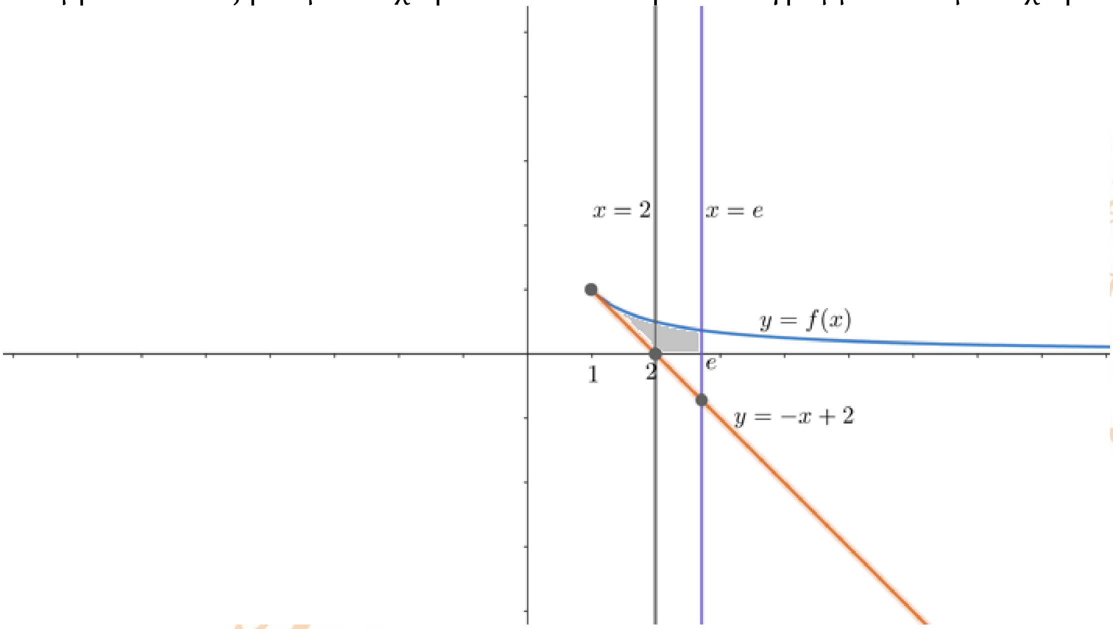
Συνεπώς $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε θα ισχύει ότι $f \searrow$ στο $\mathbb{R}$ και επομένως f $1-1$.
Αφού $f \searrow$ και συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0, +\infty), \text{διότι:}$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

Γ4.

Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι το παρακάτω γραμμοσκιασμένο χωρίο.



Αν Ω_1 είναι το χωρίο που περικλείεται από την $x = 1$, την C_f, την (ε) και την $x = 2$
και Ω_2 είναι το χωρίο που περικλείεται από την $x = 2$, την C_f, τον άξονα $x'x$ και την $x = e$
τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \int_1^2 |f(x) - (-x+2)|\, dx + \int_2^e \left|\frac{1}{x}\right| dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) dx + \int_2^e \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 + [\ln|x|]_2^e = \ln 2 + 2 - 4 - \frac{1}{2} + 2 + 1 - \ln 2 = \frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

- Χρησιμοποιήσαμε ότι $\frac{1}{x} + x - 2 = \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$.

Θέμα Δ

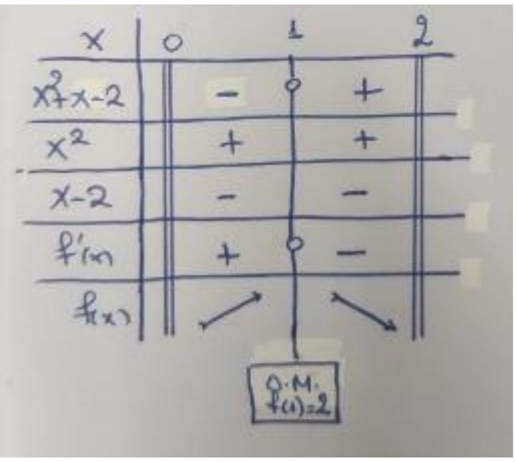
Δ1.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)-2x}{x-1}$ κοντά στο 1 με $\lim_{x\to1} g(x) = l \in \mathbb{R}$.
Τότε, $f(x) = g(x)(x-1) + 2x$, συνεπώς $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(g(x)(x-1) + 2x) = 2$

Η f είναι συνεχής στο $(0,2)$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, άρα f συνεχής και στο $x_0 = 1$ με $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$.
Έτσι $f(1) = \ln 1 - 1 + k \Leftrightarrow 2 = -1 + k \Leftrightarrow k = 3$.
Οπότε ο τύπος της f θα είναι: $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3, x \in (0,2)$.

Δ2.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων με:
$f'(x) = -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$
Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$(απορρίπεται) ή $x = 1$. Ο πίνακας προσήμων της παραγώγου και της μονοτονίας της f φαίνεται παρακάτω:



- f συνεχής και $\nearrow$ στο $\Delta_1 = (0,1)$ και άρα
$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x)\right) = (-\infty, 2)$$
καθώς $\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$.
- f συνεχής και $\searrow$ στο $\Delta_2 = (1,2)$ και άρα
$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right) = (-\infty, 2)$$
καθώς $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$ επειδή
$\lim_{x\to 2^-} \ln(2-x) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$.

Είναι:
- $0 \in f(\Delta_1)$ και $f \nearrow$ στο Δ_1 άρα θα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.
- $0 \in f(\Delta_2)$ και $f \searrow$ στο Δ_2 άρα θα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες x_1, x_2 με $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$.
Επιπλέον, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - 3 + 3 = \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \ln 5 - \ln 3 > 0$
Άρα $f\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) > f(x_1) \overset{f\nearrow(0,1)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{3} > x_1$ και άρα $x_1 < \frac{1}{3}$.

Δ3.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$, για κάθε $x \in (0,2)$ και άρα f' γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$. Άρα το ξ είναι μοναδικό.

Δ4.

i)

Οι συναρτήσεις F, G είναι αρχικές της f στο $(0,2)$.

Άρα $F'(x) = G'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in (0,2)$. Από γνωστή συνέπεια του Θ.Μ.Τ. υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$F(x) = G(x) + c, x \in (0,2) \quad (1)$$

Για $x = x_1$, η (1) δίνει: $F(x_1) = G(x_1) + c$. Όμως $F(x_1) = G(x_1) + c \overset{F(x_1)=0}{\Longleftrightarrow} c = -G(x_1)$

Άρα η (1) γίνεται $F(x) = G(x) - G(x_1)$ (2)

Για $x = x_2$, η (2) δίνει: $F(x_2) = G(x_2) - G(x_1) \overset{G(x_2)=0}{\Longleftrightarrow} F(x_2) + G(x_1) = 0$.

ii)

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x, x \in [x_1, x_2]$

- Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών.
- $h(x_1) = x_1F(x_1) + x_2G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = -x_2F(x_2) + x_1 - x_2$.

$$= -[x_2F(x_2) + x_2 - x_1] < 0, \text{ διότι}$$

$F'(x) = f(x), x \in (x_1, x_2)$. Όμως $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ και f συνεχής άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (x_1, x_2) και $f(1) = 2 > 0$ άρα έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Επομένως $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ και F συνεχής στο $[x_1, x_2]$, άρα $F \nearrow$ στο $[x_1, x_2]$.

Άρα έχουμε: $x_1 < x_2 \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} F(x_1) < F(x_2) \Leftrightarrow F(x_2) > 0$.

Συνεπώς $x_2F(x_2) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow h(x_1) < 0$.

- $h(x_2) = x_1F(x_2) + x_2G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$ αφού $F(x_2) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$.

Άρα $h(x_1)h(x_2) < 0$. Επομένως, από το Θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0$, και ισοδύναμα η αρχική, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (x_1, x_2).

Παρατηρούμε ότι $h'(x) = x_1F'(x) + x_2G'(x) + 2 = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 > 0$ γιατί $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Άρα $h'(x) > 0$ στο (x_1, x_2) και h συνεχής στο $[x_1, x_2]$, επομένως $h \nearrow$ στο $[x_1, x_2]$. Άρα η ρίζα της h είναι μοναδική.

Σημείωση: Το πρόσημο του $F(x_2)$ προκύπτει και ως εξής:

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Όμως $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_1$ ή $x = x_2$. Επιπλέον f συνεχής στο $[x_1, x_2]$ άρα

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx > 0 \Leftrightarrow F(x_2) - F(x_1) > 0 \Leftrightarrow F(x_2) > 0.$$

Ομοίως: $G(x_2) - G(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx > 0 \Leftrightarrow -G(x_1) > 0 \Leftrightarrow G(x_1) < 0.$