αξία
ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ενδεικτικές Λύσεις Μαθηματικών Προσανατολισμού Γ' Λυκείου 06/06/2023.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 111

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 104

Α3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 128

Α4. α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό.

αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$, $D_g=\mathbb{R}$ και $h(x)=\ln x$, $D_h=(0,+\infty)$

$D_f=D_{g\circ h}=\{x\in D_h \text{ και } h(x)\in D_g\}=\{x>0 \text{ και } \ln x\in\mathbb{R}\}$

άρα $D_f=D_{g\circ h}=(0,+\infty)$

$f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=\dfrac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\dfrac{4-e^{\ln x^2}}{x}=\dfrac{4-x^2}{x}$.

Επομένως $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x}$, $x>0$.

Β2. i) $f(x)=\dfrac{4}{x}-x$, $x>0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}-1<0$, για κάθε $x>0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f=(0,+\infty)$.

ii) Έχουμε ότι: $\pi>e \overset{f\downarrow}{\iff} f(\pi)<f(e) \iff$

$\dfrac{4-\pi^2}{\pi}<\dfrac{4-e^2}{e} \overset{4-e^2<0}{\iff} \dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}$.

B3. $f(x)=\frac{4}{x}-x$, $D_f=(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{4-x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot(4-x^2)=+\infty$,

διότι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(4-x^2)=4$

Άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x^2}-1\right)=0-1=-1$ άρα $\boxed{\lambda=-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ άρα $\boxed{\beta=0}$

Άρα η ευθεία $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu(1+x^2)=0$, διότι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}-x\right)=-\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$.

- Για $x>0$, $-1\le\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\le1$ και $f(x)<0$ κοντά στο $+\infty$

άρα $-\frac{1}{f(x)}\ge\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\ge\frac{1}{f(x)}\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}\le\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\le\frac{-1}{f(x)}$

με $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{f(x)}=0$ άρα από

Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\int_2^3 x f(x) = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+a\right)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+a\cdot x)dx = 1$

$\Leftrightarrow \left[x + a\cdot\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3 + \frac{9a}{2} - 2 - 2a = 1$

$\Leftrightarrow \frac{5a}{2} = 0 \Leftrightarrow a = 0.$

Γ2. $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$

i) Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (x-2) = -1$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x} = -1$

Ισχύει $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, επομένως f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1$, άρα ορίζεται εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

ii) $\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = -1\cdot(x-1)$

άρα $\boxed{\varepsilon: y = -x+2}$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η ε με τον $x'x$, τότε $\varepsilon\varphi\omega = -1$, $\omega \in [0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi)$.
Άρα $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

Γ3. Για $x<1$, f παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x-3 < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,1)$ και $f'(1) = -1 < 0$

Για $x>1$, f παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$

Επομένως $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $D_f = \mathbb{R}$, επομένως f 1-1.

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = \mathbb{R}$, άρα

$$f(\Delta) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0,+\infty)$$

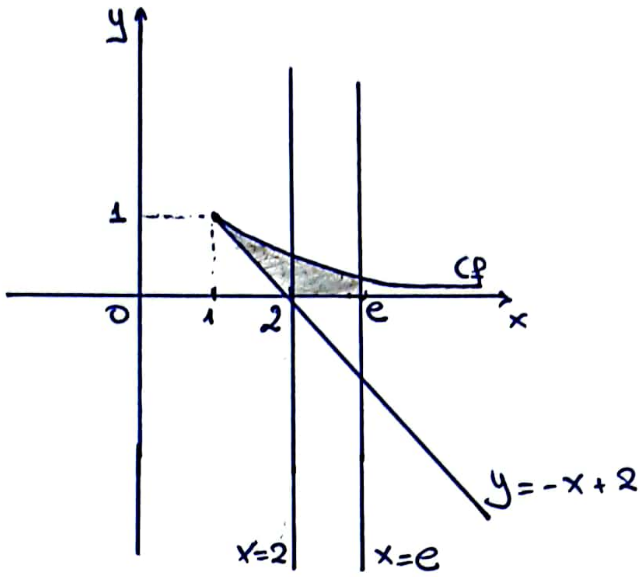
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2-3x+3) = \lim_{x\to-\infty} (x^2) = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta) = (0,+\infty)$.

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Γ4.



$$E(\Omega)=\int_1^2\left(f(x)-(-x+2)\right)dx+\int_2^e\frac{1}{x}\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx+\int_2^e\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\left[\ln x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2+\left[\ln x\right]_2^e=\cancel{\ln 2}+\cancel{2}-4-\frac{1}{2}+\cancel{2}+1-\cancel{\ln 2}=\frac{1}{2}$$

άρα $E(\Omega)=\frac{1}{2}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-2x}{x-1} = l \in \mathbb{R}$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)-2x}{x-1}$, κοντά στο 1, με $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = l$, οπου $l \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x)-2x = g(x)(x-1) \Leftrightarrow f(x) = (x-1)g(x)+2x$

επομένως $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)g(x)+2x\right] = 2$

Η f είναι συνεχής στο $(0,2)$, ως πράξεις και σύνθεση συνεχών άρα f συνεχής και στο $x_0=1$, με $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

$f(1) = \ln 1 - 1 + k = k-1$ άρα $k-1=2 \Leftrightarrow \boxed{k=3}$.

Δ2. $f(x) = \ln(2-x) - \dfrac{1}{x} + 3$, $x \in (0,2)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων με:

$$f'(x) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=-2$ απορ.

x	0		1		2
x^2+x-2	||	$-$	0	$+$	||
x^2	||	$+$		$+$	||
$x-2$	||	$-$		$-$	||
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$f(x)$	||	$\nearrow$	Ο.Μ. $f(1)=2$	$\searrow$	||

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(0,1]$ άρα

$f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\ f(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$

$f(1)=2$ άρα $f(\Delta_1)=(-\infty,2]$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=(1,2)$ άρα

$f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to2^-}f(x),\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)\right)$

· $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to2^-}\left(-\frac{1}{x}+3\right)=-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$

και $\lim\limits_{x\to2^-}\ln(2-x)\ \underset{\substack{x\to2^-\\ u\to0^+}}{\overset{2-x=u}{=\!=\!=}}\ \lim\limits_{u\to0^+}(\ln u)=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2$ άρα $f(\Delta_2)=(-\infty,2)$

Επομένως $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)$ άρα $f(\Delta)=(-\infty,2]$.

$0 \in f(\Delta_1)$ και f γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (0,1]$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$ ($x_1 \neq 1$, αφού $f(1)=2\neq 0$)

$0 \in f(\Delta_2)$ και f γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=(1,2)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

$f(\frac{1}{3}) = \ln(2-\frac{1}{3}) - 3+3 = \ln\frac{5}{3} = \ln 5 - \ln 3 > 0$

$f(\frac{1}{3}) > 0 \Leftrightarrow f(\frac{1}{3}) > f(x_1) \underset{(0,1)}{\overset{f \uparrow}{\Longleftrightarrow}} \frac{1}{3} > x_1$ άρα $x_1 < \frac{1}{3}$.

Δ3. Αρκεί να αποδείξω ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$

$$f'(\xi) = \frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1} = \frac{f(\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}-x_1} = \frac{f(\frac{1}{3}) - f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}.$$

- f συνεχής στο $[x_1, \frac{1}{3}]$, ως πράξεις και σύνθεση συνεχών
- f παραγωγίσιμη στο $(x_1, \frac{1}{3})$, ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων

Άρα από Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει $\xi \in (x_1, \frac{1}{3})$: $f'(\xi) = \dfrac{f(\frac{1}{3}) - f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}$

f' παραγωγίσιμη με $f''(x) = \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$, $x \in (0,2)$

άρα f' γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$.

Άρα το ξ είναι μοναδικό.

αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Δ4. i) Οι συναρτήσεις F, G είναι αρχικές της f στο $(0,2)$

άρα $F'(x)=f(x)=G'(x)$, για κάθε $x\in(0,2)$.

Από γνωστή συνέπεια του Θ.Μ.Τ., υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, ώστε

$F(x)=G(x)+c$, $x\in(0,2)$ (1).

Για $x=x_1$, η (1) δίνει $\overset{0}{\cancel{F(x_1)}}=G(x_1)+c \Leftrightarrow c=-G(x_1)$

Άρα η (1) γίνεται $F(x)=G(x)-G(x_1)$ (2)

Για $x=x_2$ η (2) δίνει $F(x_2)=\overset{0}{\cancel{G(x_2)}}-G(x_1) \Leftrightarrow \boxed{F(x_2)+G(x_1)=0}$

ii) Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x$, $x\in[x_1,x_2]$

- h συνεχής στο $[x_1,x_2]$, ως πράξεις συνεχών
- $h(x_1)=x_1\overset{0}{\cancel{F(x_1)}}+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=-x_2F(x_2)+x_1-x_2$
  $=-\left[x_2F(x_2)+x_2-x_1\right]<0$

Όμως $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ και f συνεχής, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (x_1,x_2) και $f(1)=2>0$

Άρα έχουμε $f(x)>0$ για $x\in(x_1,x_2)$

Επομένως $F'(x)=f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$.

και F συνεχής στο $[x_1,x_2]$, άρα F γνησίως αύξουσα στο $[x_1,x_2]$.

Άρα έχω: $x_1 < x_2 \overset{F\uparrow}{\Longleftrightarrow} \cancel{F(x_1)}^{0} < F(x_2) \Longleftrightarrow F(x_2) > 0$

άρα $x_2F(x_2) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow h(x_1) < 0$

- $h(x_2) = x_1F(x_2) + x_2\cancel{G(x_2)}^{0} - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$

αφού $F(x_2) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$.

άρα $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$

Επομένως, από Θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0$, και ισοδύναμα η αρχική, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2).

Παρατηρώ ότι $h'(x) = x_1F'(x) + x_2G'(x) + 2 = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 > 0$ διότι $f(x) > 0$, για $x \in (x_1, x_2)$

Άρα $\left.\begin{array}{l} h'(x) > 0 \text{ στο } (x_1, x_2) \\ h \text{ συνεχής στο } [x_1, x_2] \end{array}\right\}$ επομένως h γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$

Άρα η ρίζα της h είναι μοναδική.