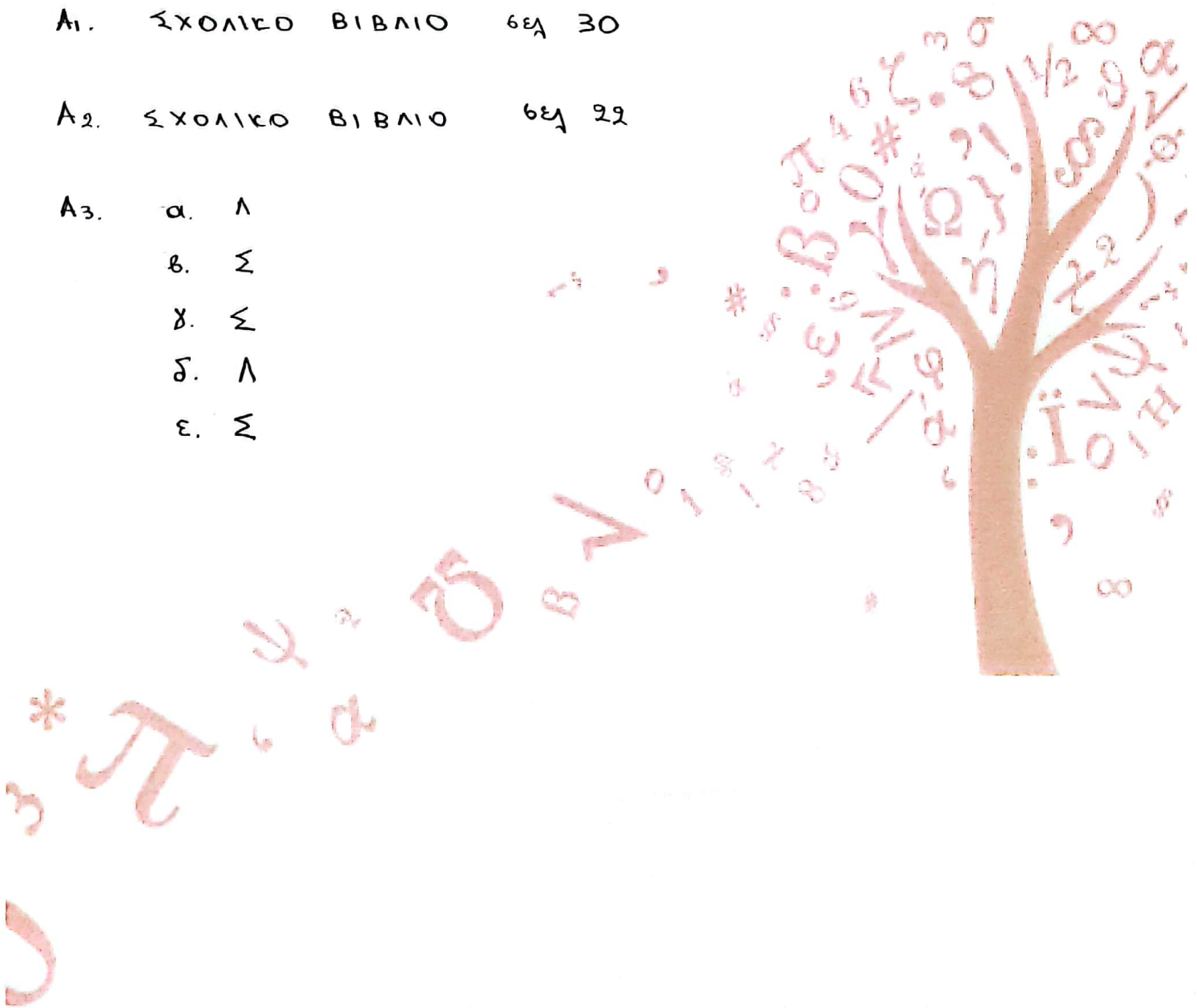




ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΩΝ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ :  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

- A1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ 6εβ 30
- A2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ 6εβ 22
- A3.
  - α. Λ
  - β. Σ
  - γ. Σ
  - δ. Λ
  - ε. Σ





ΘΕΜΑ Β

B<sub>1</sub>. Η f είναι παραγωγίσιμη με  $f'(x) = 6 \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot x - 12, x \in \mathbb{R}$

B<sub>2</sub>. Η εμφανομένη ε της γραφικής παράστασης της f στο  $x_0 = 1$  έχει κλίση  $\gamma = f'(1) = 2 \cdot a - 6$   
 ελλ'  $x \iff \gamma = 0 \iff 2 \cdot a - 6 = 0 \iff a = 3$

B<sub>3</sub>. Για  $a = 3$  η συνάρτηση f παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 10, x \in \mathbb{R}$$

$$\mu\epsilon \quad f'(x) = 6 \cdot x^2 + 6x - 12 = 6 \cdot (x^2 + x - 2), x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \iff 6 \cdot (x^2 + x - 2) = 0 \iff$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \iff$$

$$x^2 - 1 + x - 1 = 0 \iff$$

$$(x-1) \cdot (x+1) + (x-1) = 0 \iff$$

$$(x-1) \cdot (x+1+1) = 0 \iff$$

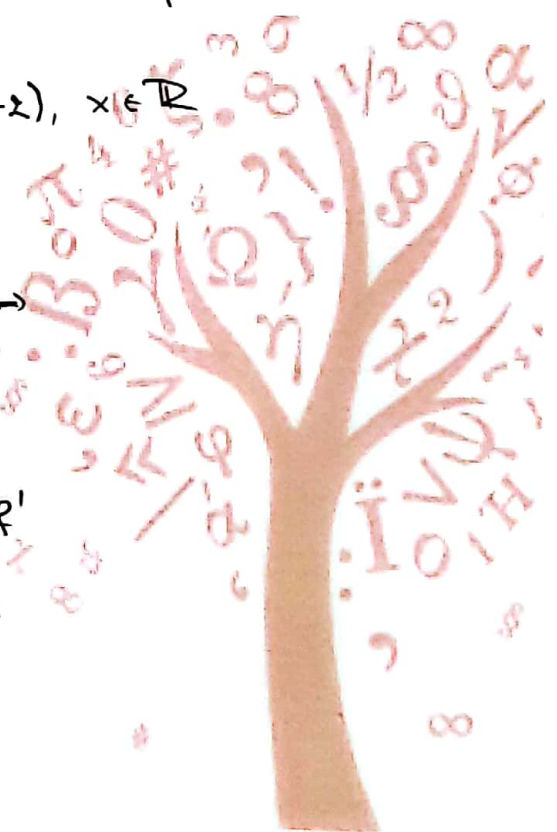
$$(x-1) \cdot (x+2) = 0$$

$$x = 1 \text{ ή } x = -2$$

Τα πρόσημα και οι ρίζες της  $f'$  φαίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
f				

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $(-\infty, -2]$  και  $[1, +\infty)$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[-2, 1]$





• Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_1 = -2$   
το  $f(-2) = 30$

• Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_2 = 1$   
το  $f(1) = 3$ .

$$\begin{aligned} \text{B4. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6 \cdot (x-1) \cdot (x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 6 \cdot (x+2) = \\ &= 6 \cdot (1+2) = 6 \cdot 3 = 18. \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ Γ

Γ.

• Η κεντρική τιμή της κλάσης  $[16, 20)$

είναι  $x_3 = \frac{16+20}{2} = 18$

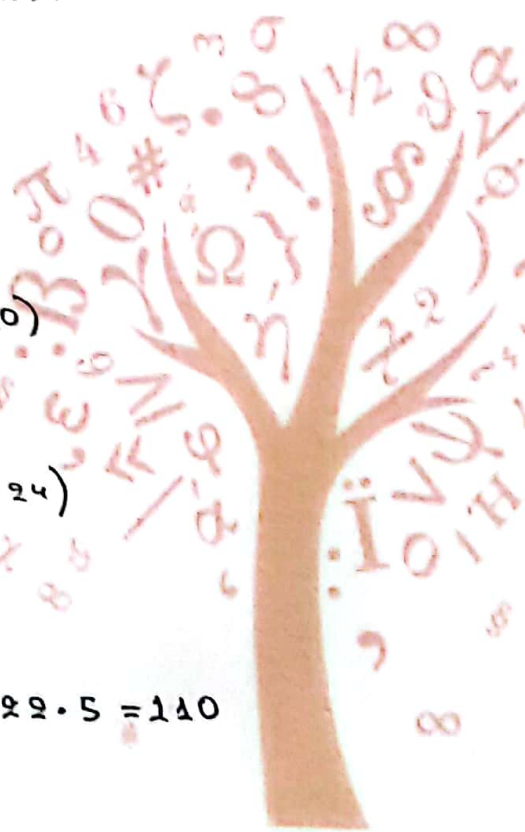
• Η κεντρική τιμή της κλάσης  $[20, 24)$

είναι  $x_4 = \frac{20+24}{2} = 22$

• Άρα  $x_3 \cdot v_3 = 18 \cdot v_3$  και  $x_4 \cdot v_4 = 22 \cdot 5 = 110$

\* Άρα  $\sum_{i=1}^4 v_i = 20 + 15 + v_3 + 5 = 40 + v_3$

και  $\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i = 200 + 210 + 18 \cdot v_3 + 110 = 18 \cdot v_3 + 520$





# αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

$$\bar{x} = 14 \iff \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i}{v} = 14 \iff \frac{18 \cdot v_3 + 520}{v_3 + 40} = 14 \iff$$

$$18 \cdot v_3 + 520 = 14 \cdot (v_3 + 40) \iff$$

$$18 \cdot v_3 + 520 = 14 \cdot v_3 + 560 \iff$$

$$4 \cdot v_3 = 40 \iff v_3 = 10$$

Γ<sub>2</sub>.

ΚΛΑΣΕΙΣ ( , )	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΙΜΗ $x_i$	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ $v_i$	$x_i \cdot v_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
[8-12)	10	20	200	320
[12-16)	14	15	210	0
[16-20)	18	10	180	160
[20,24)	22	5	110	320
ΣΥΝΟΛΟ		50	700	800

Γ<sub>3</sub>. 
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i}{v} = \frac{800}{50} \iff s^2 = 16$$

\* Γ<sub>4</sub>. Η τυπική απόκλιση είναι  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} \iff s = 4$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι :

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \approx 0,29 \text{ ή } 29\%$$

Επειδή  $CV = 29\% > 10\%$ , το δείγμα είναι ανομοιογενές.





ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{(1)' \cdot x^2 - 1 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = +\frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

άρα

Η  $f'(x) = \frac{2}{x^3}$ , με  $x \neq 0$

- $f'(x) > 0 \iff \frac{2}{x^3} > 0 \iff x > 0$
- $f'(x) < 0 \iff \frac{2}{x^3} < 0 \iff x < 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f$	↘		↗

- Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 0)$
- Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$

Δ2. Για κάθε  $x \in [-4, -1]$  έχουμε

$$-4 \leq x \leq -1 \iff f(-4) \geq f(x) \geq f(-1) \iff$$

$$-\frac{1}{16} \geq f(x) \geq -1 \iff$$

$$-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$



Δ3. Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο  $M(1, f(1))$   
είναι:  $\lambda = f'(1) = \frac{2}{1^3} = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$  (2)

Η εξίσωση της  $\varepsilon$  είναι:  $y = \lambda \cdot x + b \Leftrightarrow$   
 $y = 2 \cdot x + b$

Επειδή η  $\varepsilon$  διέρχεται από το  $M(1, f(1))$  έχουμε:

$$f(1) = 2 \cdot 1 + b \Leftrightarrow -\frac{1}{1^2} = 2 + b \Leftrightarrow b = -3$$

Η εξίσωση της  $\varepsilon$  είναι:  $y = 2 \cdot x - 3$

Δ4. Οι τετραγώνες  $y_i$  δίνονται από τη σχέση:

$$y_i = 2 \cdot x_i - 3, \quad i = 1, 2, 3$$

Έχουμε  $\bar{x} = 4$  και  $s_x = 2$

$$\text{Οπότε: } \bar{y} = 2 \cdot \bar{x} - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5 \Leftrightarrow \bar{y} = 5$$

$$s_y = 2 \cdot s_x = 2 \cdot 2 = 4 \Leftrightarrow s_y = 4$$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι

$$CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ ή } 80\%$$