ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ σελ 30

Α2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ σελ 22

Α3. α. Λ

β. Σ

γ. Σ

δ. Λ

ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 6\cdot x^2 + 2\cdot a\cdot x - 12, x \in \mathbb{R}$

Β2. Η εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ έχει κλίση $\lambda = f'(1) = 2\cdot a - 6$

$\varepsilon \parallel x'x \iff \lambda = 0 \iff 2\cdot a - 6 = 0 \iff a = 3$

Β3. Για $a=3$ η συνάρτηση f παίρνει τη μορφή:

$f(x) = 2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 - 12\cdot x + 10 \quad , x \in \mathbb{R}$

με $f'(x) = 6\cdot x^2 + 6x - 12 = 6\cdot(x^2 + x - 2), \quad x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 \iff\ & 6\cdot(x^2 + x - 2) = 0 \iff \\
& x^2 + x - 2 = 0 \iff \\
& x^2 - 1 + x - 1 = 0 \iff \\
& (x-1)\cdot(x+1) + (x-1) = 0 \iff \\
& (x-1)\cdot(x+1+1) = 0 \iff \\
& (x-1)\cdot(x+2) = 0 \\
& x = 1 \text{ ή } x = -2
\end{aligned}
$$

Τα πρόσημα και οι ρίζες της f' φαίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[1, +\infty)$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 1]$

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=-2$ το $f(-2)=30$
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=1$ το $f(1)=3$.

Β4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(x+2)}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}6\cdot(x+2)=$

$$=6\cdot(1+2)=6\cdot 3=18.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

- Η κεντρική τιμή της κλάσης $[16,20)$ είναι $x_3=\dfrac{16+20}{2}=18$
- Η κεντρική τιμή της κλάσης $[20,24)$ είναι $x_4=\dfrac{20+24}{2}=22$
- Άρα $x_3\cdot\nu_3=18\cdot\nu_3$ και $x_4\cdot\nu_4=22\cdot 5=110$
- Άρα $\sum\limits_{i=1}^{4}\nu_i=20+15+\nu_3+5=40+\nu_3$

και $\sum\limits_{i=1}^{4}x_i\cdot\nu_i=200+210+18\cdot\nu_3+110=18\cdot\nu_3+520$

$$\bar{x} = 14 \iff \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot v_i}{v} = 14 \iff \frac{18 \cdot v_3 + 520}{v_3 + 40} = 14 \iff$$

$$18 \cdot v_3 + 520 = 14 \cdot (v_3 + 40) \iff$$

$$18 \cdot v_3 + 520 = 14 \cdot v_3 + 560 \iff$$

$$4 \cdot v_3 = 40 \iff v_3 = 10$$

Γ2.

ΚΛΑΣΕΙΣ [,)	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΙΜΗ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i	$x_i \cdot v_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
[8-12)	10	20	200	320
[12-16)	14	15	210	0
[16-20)	18	10	180	160
[20,24)	22	5	110	320
	ΣΥΝΟΛΟ	50	700	800

Γ3. $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i}{v} = \frac{800}{50} \iff s^2 = 16$

Γ4. Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} \iff s = 4$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι :

$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \simeq 0{,}29$ ή 29%

Επειδή $CV = 29\% > 10\%$, το δείγμα είναι ανομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{(1)'\cdot x^2 - 1\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} = +\frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

<u>άρα</u>

Η $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}$, με $x \neq 0$

- $f'(x) > 0 \iff \dfrac{2}{x^3} > 0 \iff x > 0$
- $f'(x) < 0 \iff \dfrac{2}{x^3} < 0 \iff x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
f	↘	‖	↗

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Δ2. Για κάθε $x \in [-4, -1]$ έχουμε

$$-4 \leq x \leq -1 \overset{f \searrow}{\iff} f(-4) \geq f(x) \geq f(-1) \iff$$

$$-\frac{1}{16} \geq f(x) \geq -1 \iff$$

$$-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Δ3. Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $M(1, f(1))$

είναι: $\lambda = f'(1) = \frac{2}{1^3} = 2 \iff \lambda = 2$ (1)

Η εξίσωση της ε είναι: $y = \lambda \cdot x + \beta \overset{(1)}{\iff}$

$y = 2 \cdot x + \beta$

Επειδή η (ε) διέρχεται από το $M(1, f(1))$ έχουμε:

$f(1) = 2 \cdot 1 + \beta \iff -\frac{1}{1^2} = 2 + \beta \iff \beta = -3$

άρα

Η εξίσωση της (ε) είναι: $y = 2 \cdot x - 3$

Δ4 Οι τεταγμένες y_i δίνονται από τη σχέση:

$y_i = 2 \cdot x_i - 3 \quad , \quad i = 1, 2, 3$

Έχουμε $\bar{x} = 4$ και $s_x = 2$

Οπότε: $\bar{y} = 2 \cdot \bar{x} - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5 \iff \bar{y} = 5$

$s_y = 2 \cdot s_x = 2 \cdot 2 = 4 \iff s_y = 4$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι

$CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$ ή 80%