Θέμα Α

Α1.
Σχολικό Βιβλίο σελίδα 186

Α2.
Σχολικό Βιβλίο σελίδα 142

Α3.
Σχολικό Βιβλίο σελίδα 161

Α4.
α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Λάθος

Θέμα Β

Β1.
$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1, x \leq 1, g(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$
$D_{f_o g} = \{\ x \in D_g \big|\ g(x) \in D_f\}$, δηλαδή πρέπει
$x \geq 0$ και $\sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$, άρα $D_{f_o g} = [0,1]$ με τύπο
$(f_o g)(x) = f\big(g(x)\big) = g^4(x) - 2g^2(x) + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2, x \in [0,1]$.

Β2.
$h(x) = (x-1)^2, x \in [0,1]$
Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $h'(x) = 2(x-1), x \in [0,1]$
Για $0 < x < 1$ έχουμε $x - 1 < 0$ οπότε $h'(x) < 0$.
Αφού h συνεχής στο $[0,1]$ και $h'(x) < 0$ στο $(0,1)$, η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ άρα 1-1 και αντιστρέψιμη.
Θέτω $y = h(x), x \in [0,1]$
$\Leftrightarrow y = (x-1)^2, x \in [0,1], y \geq 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{y} = |x-1|, x \in [0,1], y \geq 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 - x, x \in [0,1], y \geq 0$
$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}, x \in [0,1], y \geq 0$
Για το πεδίο ορισμού της αντίστροφης έχουμε:
$0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sqrt{y} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{y} \leq 1 \Leftrightarrow y \in [0,1]$

Έτσι τελικά για την αντίστροφη έχουμε:
$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$

Β3.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, x = 1 \end{cases}$$

Για $x \in [0,1)$ έχω $\varphi(x) = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(1-x)} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

Άρα $\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$

Επιπλέον η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών, επομένως η φ θα είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Είναι $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ και $\varphi(0) = 1$. Επειδή τώρα $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) < \eta\mu\alpha < \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$ και άρα $\varphi(1) < \eta\mu\alpha < \varphi(0)$

Επιπλέον, τώρα έχουμε:

- η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$.
- Ο αριθμός $\eta = \eta\mu\alpha$ είναι μεταξύ των αριθμών $\varphi(0), \varphi(1)$

Συνεπώς από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (Θ.Ε.Τ.) θα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ για το οποίο $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$.

Θέμα Γ

Γ1.

$f'(x) = (-2x)'$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ και επομένως από τις συνέπειες του Θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:
$f(x) = -2x + c_1$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$.
Επιπλέον για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ έχουμε $f'(x) = (x^3 - x)'$ επομένως από τις συνέπειες του Θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:
$f(x) = x^3 - x + c_2$, για κάθε $x \in (-1, +\infty)$.

Άρα $f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, x < -1 \\ x^3 - x + c_2, x > -1 \\ f(-1), x = -1 \end{cases}$

Αφού η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι $f(0) = 0$ και άρα
$0^3 - 0 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$. Επομένως :

$$f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, x < -1 \\ x^3 - x, x > -1 \\ f(-1), x = -1 \end{cases}$$

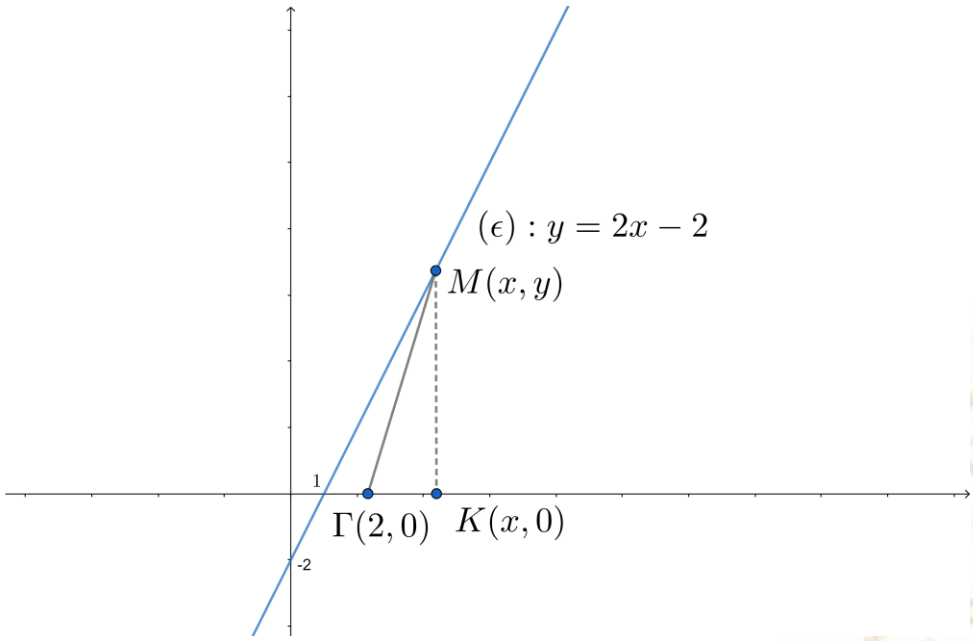
Όμως f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο -1 επομένως: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

Είναι:
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (-2x + c_1) = -2 \cdot (-1) + c_1 = 2 + c_1$
$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^3 - x) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$
Επομένως πρέπει να ισχύει $2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$ και $f(-1) = 0$.

Συνεπώς $f(x) = \begin{cases} -2x - 2, x \leq -1 \\ x^3 - x, x > 1 \end{cases}$.

Γ2.
Θεωρούμε το σημείο επαφής $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης τότε θα είναι:
$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
Το σημείο $N(0, -2)$ ανήκει στην ευθεία (ε) αν και μόνο αν:
$-2 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow -2 - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(-x_0)$
$\Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0 \Leftrightarrow -2x_0^3 = -2 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$
Με αντικατάσταση του x_0 στην (ε) έχουμε ότι η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης θα είναι:
$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$

Γ3.



Τη χρονική στιγμή t η τετμημένη του κινητού είναι $x(t)$ και η τεταγμένη είναι $y(t) = 2x(t) - 2$ με $x(t) > 2$.
Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε $x(t_0) = 3$, $y(t_0) = 4$ και $x'(t_0) = 2$
Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ δίνεται από την συνάρτηση:

$$E(t) = \frac{1}{2} \cdot (\Gamma K) \cdot (KM) = \frac{(x(t) - 2)(2x(t) - 2)}{2} = \frac{2(x(t) - 2)(x(t) - 1)}{2} = (x(t) - 2)(x(t) - 1)$$

Άρα $E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2$ και συνεπώς θα είναι
$E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t)$. Επομένως τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι:
$E'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6\ \tau.\mu./\delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho\acute{o}\lambda\varepsilon\pi\tau o$.

Γ4.
Έστω $A = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1 - x^3} \right]$
Για το $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$ εργαζόμαστε ως εξής:
Θέτουμε $u = f(x)$. Τότε όταν $x \to -\infty$ θα έχουμε $u \to u_0$ όπου
$u_0 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x - 2) = +\infty$
και επομένως $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0$.

Για κάθε $u > 0$ έχουμε:

$\left|\frac{\eta\mu u}{u}\right| = \frac{|\eta\mu u|}{|u|} \leq \frac{1}{|u|} = \frac{1}{u} \Leftrightarrow -\frac{1}{u} \leq \frac{\eta\mu u}{u} \leq \frac{1}{u}$

Τώρα είναι $\lim_{u\to+\infty} -\frac{1}{u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u} = 0$ και άρα με βάση το κριτήριο παρεμβολής θα είναι:

$\lim_{u\to+\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0$

Για το $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε $u = -x$. Τότε όταν $x \to -\infty$ θα έχουμε $u \to u_0$ όπου $u_0 = \lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{1+u^3} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u^3-u}{u^3+1} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1.$

Έτσι τελικά $A = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = 0 + 1 = 1.$

Θέμα Δ

Δ1 i)

$f(x) = x - \ln(3x), x \in (0,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = 1 - \frac{3}{3x} = \frac{x-1}{x}, x > 0$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Η f συνεχής στο $(0,1]$ και $f'(x) < 0$ για $x \in (0,1)$ επομένως f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Η f συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x) > 0$ για $x \in (1,+\infty)$ επομένως f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0,1]$ επομένως

$f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x\to0^+} f(x)\right) = [1 - \ln 3, +\infty)$ καθώς:

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x - \ln(3x)) = +\infty$, διότι

$\lim_{x\to0^+} \ln(3x) = \lim_{x\to0^+}[\ln 3 + \ln x] = -\infty$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [1,+\infty)$ επομένως

$f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = [1 - \ln 3, +\infty)$ καθώς:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right) = +\infty$ αφού $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x)}{x} =_{D.L.H.} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Παρατηρούμε ότι $e < 3 \Rightarrow \ln e < \ln 3 \Rightarrow 1 - \ln 3 < 0$

- Το $0 \in f(\Delta_1)$, άρα είναι μια τιμή που παίρνει η f στο Δ_1. Επομένως υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$. Επειδή η f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 το x_1 είναι η μόνη ρίζα της f στο Δ_1.
- Το $0 \in f(\Delta_2)$, άρα είναι μια τιμή που παίρνει η f στο Δ_2. Επομένως υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$. Επειδή η f γνησίως αύξουσα στο Δ_2 το x_2 είναι η μόνη ρίζα της f στο Δ_2.

Σημείωση: Επειδή $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ προκύπτει ότι $x_1 < 1 < x_2$.

Δ1. ii)

Η $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, άρα η f κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Δ2.
Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx$$

Η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο (x_1, x_2) άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό. Επειδή $1 \in (x_1, x_2)$ και $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$, θα είναι $f(x) < 0$, για $x \in (x_1, x_2)$, επομένως $f(x) \leq 0$ για $x \in [x_1, x_2]$. Άρα:

$$E = -\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = -\int_{x_1}^{x_2} (x)' f(x) dx = -[xf(x)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} xf'(x)\, dx$$

$$= -[x_2 f(x_2) - x_1 f(x_1)] + \int_{x_1}^{x_2} (x-1)\, dx =$$

$$= 0 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2). (1)$$

Παρατήρηση: Επειδή $|f|$ είναι συνεχής και μη αρνητική στο $[x_1, x_2]$ και δεν μηδενίζεται ταυτοτικά στο διάστημα αυτό θα είναι $E > 0$.

Δ3.

- Η f είναι αρνητική στο (x_1, x_2)
- $0 < x < x_1 \Rightarrow f(x) > f(x_1) = 0$, αφού f γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_1] \subseteq (0,1]$
- $x > x_2 \Rightarrow f(x) > f(x_2) = 0$, αφού f γνησίως αύξουσα στο $[x_2, +\infty) \subseteq [1, +\infty)$.

Επομένως για να δείξουμε ότι $f(2 - x_1) < 0$ αρκεί να δείξουμε ότι $2 - x_1 \in (x_1, x_2)$

- $x_1 < 2 - x_1 \Leftrightarrow 2x_1 < 2 \Leftrightarrow x_1 < 1$ που ισχύει
- $2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0$ το οποίο ισχύει αφού από την (1) έχω διαδοχικά ότι: $E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0$, αφού $x_2 > x_1$.

Άρα $x_1 < 2 - x_1 < x_2$ και $f(2 - x_1) < 0$.

Δ4.
Για $x > 0$, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα
$2f(x) = f(1) + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow [f(x) - f(1)] + [f(x) - f'(x_2)(x - x_2)] = 0. (2)$
Παρατηρούμε ότι $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.
Η εφαπτομένη της C_f στο $\Sigma(x_2, f(x_2))$ έχει εξίσωση:
$(\varepsilon): y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$.
Επειδή η f είναι κυρτή, η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής. Επομένως: $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$, για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$.
Άρα:

- $f(x) - f(1) \geq 0$ για κάθε $x > 0$
- $f(x) - f'(x_2)(x - x_2) \geq 0$ για κάθε $x > 0$

και οι ισότητες ισχύουν για διαφορετικές τιμές του x. Επομένως :
$[f(x) - f(1)] + [f(x) - f'(x_2)(x - x_2)] > 0$ για κάθε $x > 0$ και η (2) είναι αδύνατη.