ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι "$1-1$" είναι και γνησίως μονότονη».
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.(μονάδα 1)
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.** (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η συνάρτηση $f(x)=\etaμx$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-συνx}{x}=0$.

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{4}{x^2}, x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(**Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.**)

Μονάδες 7

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}, x\in(0,8)$$

Μονάδες 5

Γ2. Ν αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5m^2$.

Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2, x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha>1$η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha=2$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx>-\frac{32}{15}.$$

Μονάδες 9

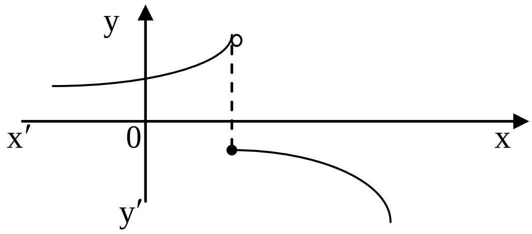
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 99

Α2.α. Ψευδής

β.



Έστω συνάρτηση f με γραφική παράσταση αυτή του σχήματος. Η f στο $\mathbb{R}$ είναι $1-1$ αφού κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει την C_f σ' ένα το πολύ σημείο. Όμως η f στο $(-\infty, x_0)$ είναι γν. αύξουσα και στο $[x_0, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.Μπορούσα να χρησιμοποιήσω το αντιπαράδειγμα του σχολικού βιβλίου σελίδα 35.

Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α4. **α)** Λάθος, **β)** Λάθος, **γ)** Σωστό, **δ)** Σωστό, **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Είναι $f(x) = x - \frac{4}{x^2}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Β1. Η f ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3}, x \neq 0$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
x^3+8	$-$	0	$+$		$+$	
x^3	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	↗		↘	‖	↗	

- η f στο $(-\infty,-2]$ είναι συνεχής και $f'(x) > 0$ στο $(-\infty,-2)$ άρα η f γν. αύξουσα στο $(-\infty,-2]$
- η f στο $[-2,0)$ είναι συνεχής και $f'(x) < 0$ στο $(-2,0)$ άρα η f γν. φθίνουσα στο $[-2,0)$

• η f στο $(0,+\infty)$ είναι συνεχής και $f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ άρα η f γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Στο $x_1=-2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-2-\frac{4}{4}=-3$.

B2. Είναι $f'(x)=1+\frac{8}{x^3}, x\neq 0$, ως ρητή είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με $f''(x)=\left(8x^{-3}\right)'=-24x^{-4}=\frac{-24}{x^4}<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Άρα η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο $(-\infty,0)$ και κοίλη στο $(0,+\infty)$. Δεν παρουσιάζει Σημεία καμπής.

B3. Είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$ άρα από τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$$

Γιατί: $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ $\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}4=4>0\\ \lim\limits_{x\to 0}x^2=0\\ \kappa'\ \ x^2>0 \text{ κοντά στο } 0\end{array}\right\}$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{x^2}=+\infty$.

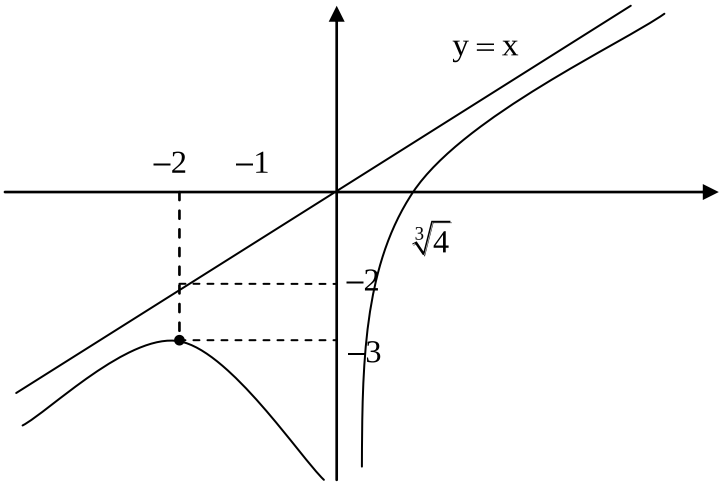
Άρα $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

B4.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f''		$-$		$-$	‖	$-$	
f'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
f	$-\infty$	↗	τοπ. μέγιστο το $f(-2)=-3$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$$



ΘΕΜΑ Γ

Έστω ότι από το σύρμα μήκους 8m κόβουμε 2 τμήματα. Το ένα με μήκος x m και το άλλο με μήκος $(8-x)\text{m}$, όπου $x \in (0,8)$. Με το τμήμα μήκους x κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς $\alpha = \frac{x}{4}\text{m}$. Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι :

$E_{\text{τετραγώνου}} = \alpha^2 = \frac{x^2}{16}\text{m}^2$.

Με το τμήμα μήκους $8-x$ κατασκευάζουμε κύκλο άρα το μήκος του κύκλου είναι $L = 8-x \Leftrightarrow 2\pi\rho = 8-x \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}\text{m}$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου. Τότε το εμβαδόν του κύκλου είναι $E_{\text{κύκλου}} = \pi\rho^2 = \cancel{\pi} \cdot \frac{(8-x)^2}{4\pi^{\cancel{2}}} = \frac{(8-x)^2}{4\pi}\text{m}^2$.

Γ1. Επομένως το άθροισμα των εμβαδών των δυο σχημάτων είναι

$$E(x) = E_{\text{τετραγώνου}} + E_{\text{κύκλου}} = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(64-16x+x^2)}{16\pi} =$$

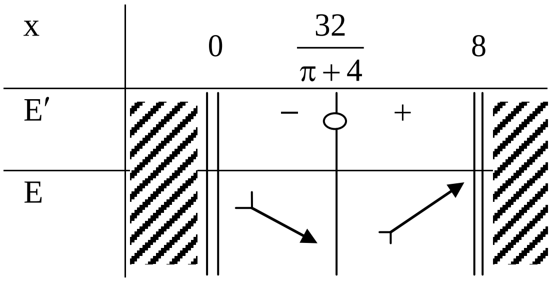
$= \frac{\pi x^2 + 256 - 64x + 4x^2}{16\pi}$. Δηλαδή $E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, x \in (0,8)$.

Γ2. Η συνάρτηση $E(x)$ ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,8)$ με

$$E'(x) = \frac{2(\pi+4)x - 64}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x - 32}{8\pi}, x \in (0,8).$$

Είναι $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$

$E'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{32}{\pi+4}$



Όταν $x=\frac{32}{\pi+4}$ το εμβαδό γίνεται ελάχιστο και ίσο με $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)m^2$.

Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\alpha=\frac{x}{4}=\frac{8}{\pi+4}$ και η διάμετρος του κύκλου

$$\delta=2\rho=\cancel{2}\,\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\cancel{2}\pi}=\frac{8\pi+\cancel{32}-\cancel{32}}{\pi(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}.$$

Επομένως το εμβαδό των δυο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Η $E(x)$ στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ είναι συνεχής και γν. φθίνουσα άρα το Σ.Τ. της είναι $\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim\limits_{x\to0^+}E(x)\right)=\left[\frac{1}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$. Το 5 ανήκει στο Σ.Τ. αφού $\frac{1}{\pi+4}<5<\frac{16}{\pi}$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right):E(x_0)=5$. Η $E(x)$ στο $\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$ είναι συνεχής και γν. αύξουσα άρα το Σ.Τ. της είναι $\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim\limits_{x\to8^-}E(x)\right)=\left[\frac{1}{\pi+4},4\right)$. Το 5 <u>δεν</u> ανήκει στο Σ.Τ. της.
Επομένως υπάρχει ένας μόνο τρόπος να κοπεί το σύρμα, ώστε το άθροισμα των εμβαδών να ισούται με $5m^2$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>
Είναι $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2, x\in\mathbb{R}$ και $\alpha>1$.

Δ1. Η f ως αποτέλεσμα πράξεων, συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x, x\in\mathbb{R}$. Η f' ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με
$f''(x)=2\left(e^{x-\alpha}-1\right)$.

$$f''(x)=0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}=1\Leftrightarrow e^{x-\alpha}=e^0\overset{e^x\,1-1}{\Rightarrow}x=\alpha$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}>1=e^0 \overset{e^x \text{γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} x>\alpha$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$		$\smile$

Στο $x_0=\alpha$ η f ως παραγωγίσιμη δέχεται εφαπτομένη άρα το σημείο $A\left(\alpha, f(\alpha)=2-\alpha^2\right)$ είναι Σ.Κ. της C_f.

Δ2. Είναι $f''(x)<0$ στο $(-\infty,\alpha)$ η f' συνεχής στο $(-\infty,\alpha]$ άρα f' γν. φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$. Είναι $f''(x)>0$ στο $(\alpha,+\infty)$, η f' συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$ άρα f' γν. αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$		$\nearrow$

Όταν $x\in(-\infty,\alpha]$ το Σ.Τ. της f' είναι $\left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right)=[2-2\alpha,+\infty)$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$. Αφού $\alpha>1 \Rightarrow -2\alpha<-2 \Rightarrow 2-2\alpha<0$. Άρα το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f' δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_1\in(-\infty,\alpha)$: $f'(x_1)=0$

$$x<x_1 \overset{f' \text{γν.φθίνουσα}}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_1)=0$$

$$x_1<x<\alpha \overset{f' \text{γν.φθίνουσα}}{\Rightarrow} f'(x_1)=0>f'(x)$$

Άρα η f στο x_1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(x_1)$.

Όταν $x\in[\alpha,+\infty)$ το Σ.Τ. της f' είναι $\left[f(\alpha), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=[2-2\alpha,+\infty)$

γιατί : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\dfrac{e^x}{e^\alpha}-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\left[\dfrac{e^x}{x}\dfrac{1}{e^\alpha}-2\right]=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

Το 0 ανήκει στο Σ.Τ. της f' (αφού $2-2\alpha<0$) άρα υπάρχει μοναδικό $x_2\in(\alpha,+\infty)$: $f'(x_2)=0$

- $\alpha<x<x_2 \overset{f' \text{γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_2)=0$

• $x_2 < x \overset{f\text{ γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f'(x_2) = 0 < f'(x)$

Επομένως η f στο x_2 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(x_2)$.

Δ3. Η f στο $[\alpha, x_2]$ είναι συνεχής και γν. φθίνουσα άρα το σύνολο τιμών της είναι $\left[f(x_2), f(\alpha) = 2-\alpha^2\right]$. Αρκεί να δείξω ότι $f(1) > 2-\alpha^2 \Rightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $\Lambda(x) = 2e^{1-x} + x^2 - 3, x \geq 1$ και $\Lambda(1) = 0$.

Είναι $\Lambda'(x) = -2e^{1-x} + 2x$

$\Lambda''(x) = 2e^{1-x} + 2 > 0$ στο $[1, +\infty)$

Άρα η Λ' γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Δηλαδή $x \geq 1 \overset{\Lambda'(x)\text{γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} \Lambda'(x) \geq \Lambda'(1) = 0$. Η ισότητα ισχύει για $x = 1$ άρα ή Λ γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ άρα $\Lambda(x) > \Lambda(1) = 0$ για κάθε $x > 1$. Επομένως $\Lambda(\alpha) > 0$.

<u>2^{ος} τρόπος:</u> Έστω ότι υπάρχει $\rho \in (\alpha, x_2)$ ώστε $f(\rho) = f(1)$ τότε εφαρμόζοντας Θ. Rolle για την f στο [1, ρ] έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (1, \rho) : f'(\xi) = 0$, το οποίο είναι άτοπο γιατί $x_1 < 1 < \alpha < \xi < \rho < x_2$. Είναι $x_1 < 1$ γιατί $f'(x_1) = 0$ και $f'(1) = 2\left(e^{1-\alpha} - 1\right) < 0$ αφού $\alpha > 1$. Δηλαδή $f'(x_1) > f'(1) \overset{f\text{ γν.φθίνουσα στο}(-\infty,\alpha)}{\Rightarrow} x_1 < 1$.

Δ4. Για $\alpha = 2$ είναι $f(x) = 2e^{x-2} - x^2, x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$. Από το Δ1 ερώτημα η f στο $A\left(2, f(2) = -2\right)$ παρουσιάζει Σ.Κ. Η εξίσωση της εφαπτομένης στην C_f στο Α είναι

$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - (-2) = -2(x-2) \Rightarrow y + 2 = -2x + 4 \Rightarrow y = -2x + 2$.

Στο $[2, +\infty)$ η C_f στρέφει τα κοίλα άνω

άρα $\left.\begin{array}{l} f(x) \geq \varepsilon\varphi \Rightarrow f(x) \geq -2+2 \\ \text{είναι } \sqrt{x-2} \geq 0, x \in [2, +\infty] \end{array}\right\} f(x) \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$ άρα

$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx \Rightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > K$

$K = \int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}\,dx$. Θέτουμε $\sqrt{x-2} = u \Rightarrow x = u^2 + 2 \Rightarrow dx = 2udu$.

Όταν $x = 2, u = 0$ και όταν $x = 3, u = 1$ άρα

$K = -2\int_0^1 (u^2+1)u2udu = -4\int_0^1 (u^4+u^2)du = -4\left[\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3}\right]_0^1 =$

$-4\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = -4\frac{8}{15} = \frac{-32}{15}$

Άρα $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$.

Επιμέλεια:
Π. ΛΥΓΚΩΝΗΣ – Μ. ΣΙΜΙΤΖΟΓΛΟΥ – Δ. ΝΤΖΟΥΡΟΠΑΝΟΣ - Β. ΒΕΝΤΟΥΡΗΣ